

Informatique fondamentale

LIV 2024-2025

Travaux dirigés - Langage et automates

Site du cours : <https://defelice.up8.site/info-fond.html>

Les exercices marqués de (@) sont à faire dans un second temps.

Dans la suite le mot vide (seul mot de longueur 0) sera noté ϵ . Par convention l'opération $*$ (étoile de Kleen) est prioritaire, puis vient la concaténation, et enfin l'union.

Exemple :

$$ba^*|b = (b(a^*))|b$$

Exercice 1. Mots

On pose $w = aba$ et $m = ccbac$ $v = \epsilon$.

1. Quel alphabet ces mots utilisent-ils ?
2. Quelle est la longueur de w ? Et de m ? Et de v ?
3. Donner wm : la concaténation de w suivie de m .
4. Donner mw , wmw , vw et mvm .
5. Soient z et y deux mots de longueurs respectives k et j . Quelle est la longueur du mot zy ?
6. Le **miroir** d'un mot est obtenu en inversant l'ordre de ses lettres. Pour un mot w , $w = w_1w_2w_3w_4 \dots w_{n-1}w_n$ son miroir est $w_nw_{n-1} \dots w_4w_3w_2w_1$ (on retourne le mot).

Exemple : le miroir de **abbca** est **acbba**.

Pour un mot x on pose x' le miroir de x . Donner w' , m' , v' , $(wm)'$ et $m'w'$.

7. Pour deux mots quelconques z et y et leurs miroirs z' et y' , donner le miroir de leur concaténation $(zy)'$ en utilisant seulement z' et y' .

Exercice 2. Ordre

On pose $L = \{ab, \epsilon, bbbba, a, b, aaaa, abb, baba, aba, abba, abb\}$

1. Ordonner les éléments de L selon l'ordre lexicographique (avec $a < b$)
2. Ordonner les éléments de L selon l'ordre militaire (avec $b < a$)
3. Ordonner les éléments de L selon l'ordre lexicographique (avec $b < a$)
4. Trouver une suite infinie strictement décroissante de mots de $\{a, b\}^*$ pour l'ordre lexicographique avec $a < b$.
5. Peut-on trouver une suite infinie, strictement décroissante de mots de $\{a, b\}^*$ pour l'ordre militaire ? Si oui donner là, sinon expliquer pourquoi.

Exercice 3. Concatenation

On pose $A = \{ab, a\}$ et $B = \{\epsilon, bb, b\}$

1. Énumérer les éléments de l'ensemble AB (ou $A \circ B$, l'ensemble produit $A B$).
2. Énumérer les éléments de $A^2 = AA$.
3. On pose $C = \emptyset$, énumérer les éléments de CA .
4. Soient G et H des langages finis tels que $|G| = g$ et $|H| = h$, peut-on exprimer $|GH|$ en fonction de g et h ? Si oui donner une formule, si non expliquer pourquoi.

Exercice 4. Étoile de Kleen

1. Soit A un langage. Donner la définition de A^* .
2. On pose $A = \{ab, a\}$. Donner l'ensemble des mots de A^* de longueur inférieure ou égale à 4

Exercice 5. Expression rationnelle

Donner tous les mots de taille 0, 1, 2, 3 et 4 de chacun des langages rationnels suivants :

1. $(a|b)(c|b)$
2. $(a|ba)^*$
3. $a(aa|b(ab)^*a)^*a$

Exercice 6. Coucou

1. Concevoir un automate reconnaissant un seul mot : **coucou**.
2. Concevoir un automate reconnaissant le mot **coucou** mais aussi n'importe quel mot composée d'une suite (finie) **cou** qui se suivent : **cou**, **coucou**, **coucoucou**,... (il faut au moins un **cou**).

Exercice 7.

Pour chacun des langages suivants, construire un automate (fini) qui reconnaît ce langage. Pour chaque automate construit indiquer s'il est déterministe ou non déterministe.

1. L'ensemble des mots sur l'alphabet $\{0, 1\}$ dont le dernier symbole est 0.
2. L'ensemble des mots sur $\{0, 1\}$ qui commencent et finissent par 1.
3. L'ensemble des mots sur $\{a, b\}$ qui contiennent au moins une fois le motif **ab** et au moins une fois le motif **ba**.

Exercice 8.

En autorisant des transitions étiquetées par le mot vide, donner un automate qui reconnaît les langages suivants.

1. $(abc|cab)$
2. $(ab|a)(b|a)$
3. $(ab|c)^*$

Exercice 9.

À partir d'un automate A qui reconnaît le langage L , comment peut-on transformer A pour qu'il reconnaisse le langage miroir de L (tous les mots de L retournés).

Exercice 10.

Dessinez un automate déterministe qui reconnaît le langage $((ab|b)(a|b))^*$