

Informatique fondamentale

LIV 2024-2025 Travaux dirigés - Induction

Site du cours : <https://defelice.up8.site/info-fond.html>

Les exercices marqués de (@) sont à faire dans un second temps.

Exercice 1. Récurrence

On définit la suite numérique U . $U_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ 2 + U_{n-1} & \text{si } n > 0 \end{cases}$ et la suite numérique V . $V_n = 2n$. Qu'ont de particulier ces deux suites ?

Exercice 2. A quatre

Soit $A = \{a, b, c, d\}$. On définit la suite U par $U_n = \begin{cases} a & \text{si } n = 0 \\ b & \text{si } n = 1 \\ c & \text{si } n = 2 \\ U_{\frac{n}{2}} & \text{si } n \text{ est pair} \\ U_{\frac{n-1}{2}} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$

1. Quel est le domaine de définition de U ?
2. Quelle est son image ?
3. Quels sont les premiers termes de la suite U .

Exercice 3. Log

On définit la suite numérique U . $U_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ U_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + 1 & \text{si } n > 1 \end{cases}$ Donner une expression de la suite en fonction de sa variable (n).

Exercice 4. La somme des entiers

Prouver que la somme des nombres de 1 à n égal à $\frac{(1+n) \times n}{2}$.

Exercice 5. La taille d'un arbre

Prouver que la taille d'un arbre complet de hauteur h égal à $2^h - 1$ (La hauteur d'un arbre vide étant 0).

Exercice 6. la somme des cube egale le caré de la somme

Prouver par recurrence que la somme des n premiers cubes parfaits égale le carré de la somme des n premiers nombre entiers.

Autrement dit $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2$.