Informatique fondamentale

LIV 2024-2025

Travaux dirigés - comprehension

Site du cours : `https://defelice.up8.site/info-fond.html`
Les exercices marqués de (@) sont à faire dans un second temps.

Exercice 1. *En compréhension*

Énumérer, si possible, les éléments des ensembles suivants. (ici $<$ et $\leqslant$ sont les inégalitées sur $\mathbb{R}$) (pour un ensemble décrit par des propositions on peut utiliser $\{x : \dots\}$ ou $\{x/\dots\}$)

1. $\{x/(x \in \mathbb{N}) \wedge (x < 16) \wedge (3 \leqslant x) \wedge (x \text{ est pair})\}$
2. $\{y/(y \in \mathbb{N}) \wedge (y < 16) \wedge \neg(3 \leqslant y))\}$
3. $\{\alpha/(\alpha \in \mathbb{Z}) \wedge (\alpha < 16) \wedge \neg(3 \leqslant \alpha))\}$
4. $\{x : (x \in \mathbb{Z}) \wedge \neg(x < 16) \wedge \neg(3 \leqslant x))\}$

Exercice 2. *Égalité*

Les ensembles suivants sont-ils égaux ? (les opérations sont considérées dans $\mathbb{R}$)

- $A = \{x : (x \in \mathbb{R}) \wedge x^2 - 5x + 6 = 0\}$
- $\{2, 3\}$
- $\{3, 6\}$
- $\{3\}$

(Indice) L'équation $x^2 - 5x + 6 = 0$ a au plus deux solutions.

Exercice 3. *Égalité 2*

Expliquez pourquoi : $\{x \in \mathbb{Z} : x^2 = 1\} = \{x \in \mathbb{R} : |x| = 1\}$.

Indice : $|\cdot|$ représente la valeur absolue d'un nombre réel. Exemple : $|-6| = 6$ $|6| = 6$

Exercice 4. *Dans un treillis*

On pose $\mathcal{U}$ l'ensemble de tous les nombres entiers positifs $x \leqslant 20$, et on pose

- $A = \{x \in \mathcal{U} : x \text{ is a prime number}\}$,
- $B = \{x \in \mathcal{U} : x \text{ is odd number}\}$.

trouver les ensembles $(A \cup B)^{\complement}$ et $A^{\complement} \cap B^{\complement}$.

Exercice 5. *Nouvelle opération ?*

Pour deux ensembles A et B on définit l'opération $\triangleright$ de la façon suivante $A \triangleright B := \Big\{x : \neg\Big(\ (x \in A) \Rightarrow (x \in B)\Big)\Big\}$

On pose $A = \{1, 2, 4, 5, 9\}$ et $B = \{2, 3, 5, 7\}$.

1. Énumérer les éléments de $A \triangleright B$
2. Énumérer les éléments de $B \triangleright A$
3. Sous quel autre nom est connue l'opération $\triangleright$?

Exercice 6. *Ensemble bizzare*

Énumérer, si possible, les éléments des ensembles suivants. (ici $<$ et $\leqslant$ sont les inégalitées sur $\mathbb{R}$) (pour un ensemble décrit par des propositions on peut utiliser $\{x : \dots\}$ ou $\{x/\dots\}$

1. $\{5 : (5 \in \mathbb{N}) \wedge \neg(5 \in \mathbb{N})\}$ (ici le symbole 5 joue le role de la variable)
2. $\{x/(x \in \mathbb{N}) \vee \neg(x \in \mathbb{N})\}$
3. $\{x/\,(x \text{ est une lettre de l'alphabet latin}) \vee ((x \in \mathbb{N}) \wedge (x \leqslant 10))\}$
4. $\{x : \big((x \text{ est une lettre de l'alphabet latin}) \quad \vee (x \in \mathbb{N})\big) \wedge (x \leqslant 10)\}$
5. $\{x/(x \in \mathbb{N}) \Rightarrow (x \in \mathbb{Z})\}$
6. Soit x un nombre entier, $\{y : (y \in \mathbb{N}) \wedge (y \leqslant x)\}$

Exercice 7. *Démonstration*

Pour deux ensembles G et H, on dit que $G = H$ si $G \subset H$ et $H \subset G$. Soit E un ensemble et soient A,B et C trois sous-ensembles de E. Montrer, en utilisant les lois propositionnelles, que

1. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$,
2. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$,
3. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
4. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.