

Informatique fondamentale DST2 2023-2024

Les documents sont interdits. Les calculatrices simples (4 opérations) sont autorisées, tous les autres appareils électroniques sont interdits. Si vous répondez à une question mais pas directement sur le sujet indiquez le clairement dans la case réponse (Exemple : "réponse sur feuille annexe").

<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0
<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1
<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2
<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3
<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4
<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5
<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6
<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7
<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8
<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9

← Codez votre numéro d'étudiant ci-contre de la manière suivante : sélectionnez en noircissant un chiffre par colonne, le premier sur la première colonne, etc. Écrivez votre nom et prénom ci-dessous.

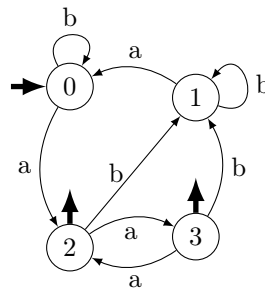
Question 1 ♣ Choisir parmi les mots suivants ceux qui appartiennent au langage de l'expression régulière (ou rationnelle) $a(ac|bc)^*bc$

- abc* *acbcbc* *aacacbcbc* *abc* *aacacbb*

Question 2 ♣

Pour chacune de ces mots, indiquer s'il est reconnu par l'automate en noircissant la case. Une mauvaise réponse donne des points négatifs !

- : Un état terminal.
- : Un état initial.
- ϵ : le mot vide.



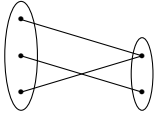
- bbaab* *babaa* *abaaaa* *aaba* *bbaab* *abbabaa*
 aaba *babbab*

Question 3 Voici un ensemble $R = (1, 3), (2, 1), (4, 4), (2, 2), (2, 3), (4, 3)$. (On note xRy pour signifier que $(x, y) \in R$). On pose $A = \{y : \forall x, (xRx) \implies (xRy)\}$. Énumérer les éléments de A . N AB B P

.....
.....
.....



Question 4 Une surjection est une application f telle que l'ensemble d'arrivée de f soit égale à l'image de f . Voici un exemple de surjection d'un ensemble à 3 éléments vers un ensemble à 2 éléments :



Dessinez toutes les autres surjections d'un ensemble à 3 éléments vers un ensemble à 2 éléments

N AB B P

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Question 5 On définit la relation suivante: $aRb : \{a, b \in \mathbb{N} \text{ tel que } a = b \text{ ou } |a| < |b|\}$. Pour chacune des affirmations suivantes indiquer si elle est vraie ou sinon donner un contre-exemple.

N AB B TB P

- Q1. R est une relation transitive.
- Q2. R est une relation réflexive.
- Q3. R est une relation irreflexive.
- Q4. R est une relation symétrique.
- Q5. R est une relation antisymétrique.
- Q6. R est une relation d'ordre.

Question 6 Soit $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, tq $f(x) = 5x$ et $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ tq $g(x) = x^2$.

- Q1. Calculer $g \circ f(3)$ et $f \circ g(3)$.
- Q2. Donner une expression des fonctions $g \circ f(x)$ et $f \circ g(x)$ (Exemple : $g \circ f(x) = x + \dots$)

N M AB B TB P

.....
.....
.....
.....
.....

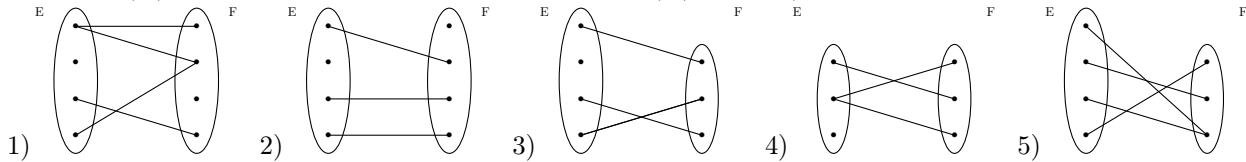


Question 7 On pose $R = \{(-1, 1), (2, -5), (7, 2), (-5, -4), (-1, -1)\}$ une relation interne sur l'ensemble $A = \{-4, -5, 2, 1, -1, 7\}$.

1. Donner $Dom(R)$ (le domaine de R) et $Im(R)$ (l'image de R).
2. Dessinez un graphe orienté qui représente la relation R (Les éléments de A sont les sommets du graphe et pour chaque couple (x, y) de R il y a un arc de x vers y).

N M AB B TB P

Question 8 Voici des graphes de relations. Quels sont les relations qui sont des applications (le domaine de définition (E) est placé à gauche et l'ensemble d'arrivé (F) à droite)



N AB B P

.....

.....

Question 9

Voici une fonction $f : [10] \rightarrow [10]$ donnée sous la forme d'un tableau. ($[10] = \{1, 2, \dots, 9, 10\}$)

$x :$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(x) :$	1	1	3	3	5	3	7	4	3	2

Répondez aux questions suivantes et dans le cas d'une réponse négative argumentez.

- | | |
|------------------------------|--------------------------------------|
| Q1 f est-elle injective ? | Q4 Donner l'image de 5 par f . |
| Q2 f est-elle bijective ? | Q5 Donner un antécédent de 3. |
| Q3 f est-elle surjective ? | Q6 Donner tous les antécédents de 1. |

N AB B TB P

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Question 10 Soit la relation R de l'ensemble $A = \{0, 1, 2, 3\}$ à l'ensemble $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ tel que $(a, b) \in R$ si et seulement si $a + b \in \{3, 4\}$.

Faites une liste de couple (tuplets) de la relation.

N AB B P

.....
.....

Question 11 Donner une partition de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, telle que l'élément 5 appartienne à un sous-ensemble de cardinal 3.

N AB B P

.....
.....
.....

Question 12 On considère la suite définie récursivement par $(a_0 = 5)$, $(a_1 = -1)$, et pour tout $n \geq 2$, $a_n = a_{n-1} + 3a_{n-2} + 1$. Calculez les quatre premiers termes de cette suite.

N AB B P

.....
.....

Question 13 ♣ L'ensemble des nombres naturels inférieur à 40000 et supérieur à 100 (une seule réponse).

fini infini vide

Question 14 ♣ L'ensemble des nombres réels entre 0 et 1 est (une seule réponse).

fini infini vide

Question 15 ♣ L'ensemble des nombres naturels inférieur à 100 et supérieur à 40000 (une seule réponse).

vide fini infini

Question 16 Prouver que l'ensemble $E = \{2^n : n \in \mathbb{N}\}$ est dénombrable.

N B TB

.....
.....
.....
.....
.....



Question 17 (Trésor)

Aladdin trouve deux coffres, A et B, dans une grotte. Il sait que chacun d'eux contient soit un trésor, soit un piège mortel.

- (P) Sur le coffre B est écrit : "Au moins un de ces deux coffres contient un trésor."
- (Q) Sur le coffre A est écrit : "Dans B, il y a un piège mortel."

Aladdin sait que soit les deux inscriptions sont vraies, soit elles sont toutes les deux fausses.

1. Aladdin peut-il choisir un coffre en étant sûr de trouver un trésor ?
2. Si c'est le cas, quel coffre devrait-il ouvrir ?

N AB B P

Question 18 Pour chaque nombre suivant donner leur écriture en binaire ou décimal. (Remplir le Tableau)

N AB B P

binaire		1001111	11010,101	
décimal	33			36,875

Question 19 Soit $A = \{ab, ac, d\}$ et $B = \{bb, cc\}$ deux ensembles. Déterminer l'ensemble $B \circ A = BA$ (concaténation de B avec A).

N AB B P

.....

.....

.....

.....

Question 20 Trouvez une expression régulière sur $\{0, 1\}$ qui déterminent le langage suivant :

$\{u|u \text{ contient un nombre pair de } 1\}$.

N AB B P

.....

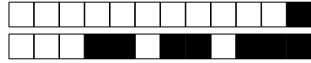
.....

.....

.....

.....

.....



Question 21 Considérons l'expression régulière $a^*(dc)^*b$. Trouvez tous les mots de longueur inférieure ou égale à 4 qui correspondent à l'expression. N AB B P

.....

.....

.....

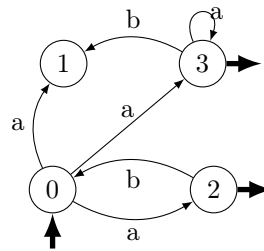
.....

.....

.....

Question 22
(BONUS) Déterminer l'automate suivant.

○ → : Un état terminal.
○ :
↑ : Un état initial.



N AB B P