

# Informatique fondamentale

## LIV 2025-2026 Travaux dirigés - Induction

---

Site du cours : <https://defelice.up8.site/info-fond.html>

Les exercices marqués de (@) sont à faire dans un second temps.

---

### Exercice 1. *Réurrence*

On définit la suite numérique  $U$ .  $U_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ 2 + U_{n-1} & \text{si } n > 0 \end{cases}$  et la suite numérique  $V$ .  
 $V_n = 2n$ . Qu'ont de particulier ces deux suites ?

### Exercice 2. *A quatre*

Soit  $A = \{a, b, c, d\}$ . On définit la suite  $U$  par  $U_n = \begin{cases} a & \text{si } n = 0 \\ b & \text{si } n = 1 \\ c & \text{si } n = 2 \\ U_{\frac{n}{2}} & \text{si } n \text{ est pair} \\ U_{\frac{n-1}{2}} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$

1. Quel est le domaine de définition de  $U$  ?
2. Quelle est son image ?
3. Quels sont les premiers termes de la suite  $U$ .

### Exercice 3. *Log*

On définit la suite numérique  $U$ .  $U_n = \begin{cases} 2 & \text{si } n = 1 \\ U_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + 1 & \text{si } n > 1 \end{cases}$  Donner une expression de la suite en fonction de sa variable ( $n$ ).

### Exercice 4. *La somme des entiers*

Prouver que la somme des nombres de 1 à  $n$  égal à  $\frac{(1+n) \times n}{2}$ .

### Exercice 5. *NoCh type 2*

Donner l'ensemble des mots qui contiennent autant de a que de b en BNF (forme de Backus-Naur). L'alphabet considéré est  $\{a,b,c\}$ .

### Exercice 6. *La taille d'un arbre*

Prouver que la taille d'un arbre binaire complet de hauteur  $h$  égal à  $2^h - 1$  (La hauteur d'un arbre vide étant 0, et la hauteur d'un arbre à 1 noeud étant 1).

### Exercice 7. *la somme des cubes égale le caré de la somme*

Prouver par recurrence que la somme des  $n$  premiers cubes parfaits égale le carré de la somme des  $n$  premiers nombre entiers.

Autrement dit  $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2$ .