Informatique fondamentale

LIV 2025-2026

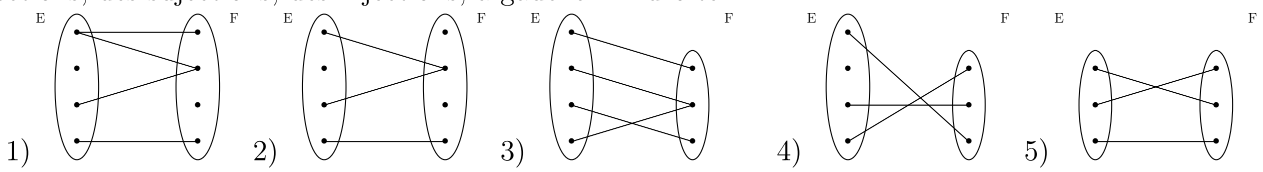
Travaux dirigés - Fonctions et applications

Site du cours : `https://defelice.up8.site/info-fond.html`
Les exercices marqués de (@) sont à faire dans un second temps.

Une *application* (à gauche) f d'un ensemble X dans un ensemble Y est définie par un ensemble G de paires ordonnées (x, y) avec $x \in X$, $y \in Y$, tel que chaque élément de X est le premier composant d'exactement un et un seul élément de G.

Exercice 1. *Graphe*

Voici des graphes de relations. Quels sont les relations qui sont des applications, des fonctions partielles, des bijections, des sujections, des injections, à gauche ? À droite ?



Exercice 2. *Application ?*

On pose $R : \{(1, 12), (7, 3), (13, 12), (5, 4), (4, 4), (3, 7), (11, 12), (10, 3), (8, 11), (9, 7), (12, 6), (2, 6), (6, 1)\}$

1. R est-elle une relation interne sur [13] ?
2. Tracer le schéma du graphe de R et vérifier que R est une application de [13]. On note $f : [13] \longrightarrow [13]$ l'application R.
3. Calculer $f(2)$, $f(9)$, $f(f(9))$, $f^3(5)$. A votre avis que vaut $f^{142}(5)$?
4. On pose $A = \{11, 13, 4\}$ énumérer les éléments de $f(A)$.
5. Donner un antécédent de 3. Donner tous les antécédents de 12. Donner tous les antécédents de 8. Énumérer les éléments de $f^{-1}(\{12\})$. Énumérer les éléments de $f^{-1}(\{12, 7, 3, 1, 9\})$.
6. On définie une nouvelle relation T. $xTy : \{x, y \in [13]/f(x) = f(y)\}$. Est-ce une relation d'équivalence ? Si oui schématiser la partition qu'elle forme. Si non donner un contre-exemple.

Exercice 3. *Bijections ?*

Lesquelles des applications suivantes sont des bijections ?

1. $f\ : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, avec $f(x) = -5$
2. $g\ : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, avec $g(x) = x$
3. $h\ : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, avec $h(x) = x + 20$
4. $t\ : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, avec $t(x) = x + 20$
5. $k\ : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\backslash\{0, 1, 2 \dots, 18, 19\}$, avec $k(x) = x + 20$
6. $f\ : \{0, 1\} \to \mathbb{Z}$, avec $f(0) = 10$ et $f(1) = 8$

Exercice 4. *Combien de fonction ?*

Soient E et F deux ensembles, en sachant que $|E| = 2$ ($|E|$: le cardinal de E) et $|F| = 3$, quel est le cardinal de E^F (E^F : l'ensemble des fonctions de $F \to E$) ?

Exercice 5. *Correspondance*

On pose $E = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}$ Marc prétend que l'ensemble E^5 est en bijection avec l'ensemble de tous les mots de 5 lettres sur l'alphabet $\{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}$. Lucie prétend que E^5 est en bijection avec les fonctions f de $f : [5] \to E$. Qui a raison ?

Exercice 6. *Rang*

Soit A l'ensemble de toutes les lettres de l'alphabet français,

$$A = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \ldots, \mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}\}.$$

Considérons la fonction $f : A \to \mathbb{N}$ qui envoie la n-ème lettre de l'alphabet sur le nombre n. Par exemple, $f(\mathrm{a}) = 1$, $f(\mathrm{b}) = 2$ et $f(\mathrm{x}) = 24$. Cette fonction est bien définie pour n'importe quelle lettre de l'alphabet et produira un nombre naturel (puisque sa place dans l'alphabet est un nombre entier non négatif). Quelle est son image et quel est son domaine de définition ?

Exercice 7. *L'eau bout à 212 degrés*

Donner l'expression d'une fonction qui transforme la température en degrés Celsius en température en degrés Fahrenheit. Quel est le domaine et l'image de cette fonction ?
(Indice : $(1°C \times 9/5) + 32 = 33.8°F$)

Exercice 8. *Composition*

Soit $f(x) = 3x - 5$ et $g(x) = 3 - 2x$. Exprimer $(f \circ g)(x)$, $(g \circ f)(x)$ et calculer $(g \circ f)(4)$ et $(f \circ g)(4)$.

Exercice 9. *Réciproque*

1. On pose $h : \begin{cases} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \\ x \mapsto 2x - 5 \end{cases}$. h est-elle une injection, une bijection, une surjection ?
2. On pose $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 2x - 5 \end{cases}$. f est-elle une injection, une bijection, une surjection ?
3. Quelle est la fonction réciproque de f ?
4. Quelle est la fonction réciproque de g définie par $g(x) = x^3 + 18$?

Exercice 10. *Fixe*

Soit $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, tq $f(x) = 3x$ et $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tq $g(x) = x^2$. Calculer $g \circ f(2)$ et $f \circ g(2)$. Existe-t-il des valeurs x pour lesquelles $g \circ f(x) = f \circ g(x)$?

Exercice 11. *Insurbijection*

Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont des injections, surjections, bijections :

1. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, avec $f(x) = x^4$
2. $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, avec $g(x) = x^4$
3. $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, avec $h(x) = x^2 + 4x + 4$
4. $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, avec $k(x) = x^2 + 4x + 4$
5. $\ell : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, avec $\ell(x) = x^3$

Exercice 12. *bij*

La fonction suivante est-elle une bijection ?

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \text{ avec } f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \text{ pair} \\ x & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 13. *Image réciproque*

Démontrer que $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$

Exercice 14. *Barbier*

Voici le début d'une démonstration de l'inexistence de bijection entre un ensemble A et l'ensemble de ses parties $\mathscr{P}(A)$.

Terminer la démonstration.

Preuve :

Soit A un ensemble. Par l'absurde : on suppose qu'il existe une bijection $f : A \to \mathscr{P}(A)$ et on va aboutir à une absurdité.
On pose $E : \{x : (x \in A) \wedge (x \notin f(x))\}$ puis $y := f^{-1}(E)$

Terminer la démonstration en montrant que $y \in E$ est absurde et que $y \notin E$ est absurde aussi et conclure.